SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 2001-2002

Davide Guidetti

PROBLEMA DI DIRICHLET DIPENDENTE DA UN PARAMETRO PER EQUAZIONI ELLITTICHE IN UN DOMINIO CILINDRICO

7 maggio 2002

Tecnoprint - Bologna 2003

Summary. We study the Dirichlet problem for a strongly elliptic linear partial differential equation depending on a complex parameter in a cylindrical domain. We consider the existence, uniqueness and regularity of solutions, the behaviour of certain norms of the solution in dependence of the parameter, the generation of analytic semigroups by suitable realizations of the problem in the space of continuous functions in the closure of the domain.

Riassunto. Si studia il problema di Dirichlet per un'equazione differenziale lineare fortemente ellittica dipendente da un parametro complesso in un dominio di tipo cilindrico. Si trattano l'esistenza, l'unicità e la regolarità di soluzioni, l'andamento di opportune norme della soluzione in dipendenza dal parametro, la generazione di semigruppi analitici di opportune realizzazioni del problema nello spazio delle funzioni continue sulla chiusura del dominio.

Siano $O = O_1 \times]0, T[$. con $O_1 \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ aperto limitato, posto localmente su un solo lato di ∂O_1. sottovarietà di $\mathbf{R}^{n+1}$ di classe C^2 e dimensione n, $T > 0$. Consideriamo il problema di Dirichlet dipendente dal parametro λ

$$\begin{cases} (\lambda - \mathcal{A})u = f \quad \text{in} \quad O, \\ u_{|\partial O} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Qui $\lambda \in \mathbf{C}$,

$$\mathcal{A} = \sum_{1 \leq i,j \leq n+2} a_{ij}(x) D_{ij} + \sum_{j=1}^{n+2} a_j(x) D_j + a_0(x) \tag{2}$$

è un operatore differenziale lineare fortemente ellittico, con coefficienti che supponiamo (per il momento) in $C(\overline{O})$. Con l'espressione "fortemente ellittico" intendiamo dire che, per $1 \leq i, j \leq n+2$, a_{ij} è a valori reali ed esiste $\nu > 0$ tale che

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n+2} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \nu |\xi|^2 \qquad \forall \xi \in \mathbf{R}^{n+2}. \tag{3}$$

Quanto alla funzione f, siamo interessati essenzialmente al caso $f \in C(\overline{O})$. I problemi che vogliamo trattare sono tra i più tipici per equazioni di questo genere. Essi sono:

1) l'esistenza, l'unicità e la regolarità di una soluzione u;

2) l'andamento di opportune norme di u in dipendenza del parametro λ;

3) se A è un'appropriata realizzazione dell'operatore $\mathcal{A}$ con condizioni di Dirichlet nello spazio $C(\overline{O})$, la caratterizzazione, per $\theta \in]0, 1[$, dello spazio di interpolazione $(C(\overline{O}), D(A))_{\theta, \infty}$.

E' ben noto che le questioni 1)-3) sono cruciali per lo studio dell'equazione parabolica

$$\begin{cases} D_t u(t, x) - \mathcal{A}u(t, x) = f(t, x) \qquad \text{in} \qquad]0, \tau[\times O, \\ u_{|]0, \tau[\times \partial O} = 0, \\ u(0, x) = u_0(x), \qquad x \in O. \end{cases} \tag{4}$$

Naturalmente, l'interesse del problema nasce dal fatto che ∂O non è regolare in corrispondenza dei punti del tipo $(x', 0)$ e (x', T), con $x' \in \partial O_1$. Infatti, nel caso in cui O sia di classe C^2, è ben noto il seguente

Teorema 1 *Sia O un aperto limitato in $\mathbf{R}^n$, posto localmente su un solo lato di ∂O, sottovarietà di $\mathbf{R}^n$ di classe C^2 e dimensione $n-1$. Consideriamo*

il problema (1), con $\mathcal{A}$ operatore differenziale lineare fortemente ellittico a coefficienti in $C(\overline{O})$, $f \in C(\overline{O})$. Allora:

(I) sia $\theta_0 \in [0, \pi[$. Esiste $R > 0$ tale che, se $|Arg(\lambda)| \leq \theta_0$ e $|\lambda| \geq R$, il problema (1) possiede un' unica soluzione u appartenente a $\bigcap_{1 \leq p < +\infty} W^{2,p}(O)$.

(II) Per ogni $\rho \in [0, 2[$, se $|Arg(\lambda)| \leq \theta_0 < \pi$ e $|\lambda| \geq R$,

$$\|u\|_{C^\rho(\overline{O})} \leq C|\lambda|^{\frac{\rho}{2}-1}\|f\|_{C(\overline{O})}, \tag{5}$$

con $C > 0$ dipendente solo da θ_0 e ρ.

(III) Introduciamo il seguente operatore A nello spazio $C(\overline{O})$: poniamo

$$\begin{array}{c} D(A) := \{u \in \bigcap_{1 \leq p < +\infty} W^{2,p}(O) : u_{|\partial O} = 0, \mathcal{A}u \in C(\overline{O})\}, \\ Au := \mathcal{A}u, u \in D(A). \end{array} \tag{6}$$

Se $\theta \in]0,1[\setminus \{\frac{1}{2}\}$, lo spazio di interpolazione reale $(C(\overline{O}), D(A))_{\theta,\infty}$ coincide, a meno di norme equivalenti, con $\{f \in C^{2\theta}(\overline{O}) : f_{|\partial O} = 0\}$.

Il teorema 1 è essenzialmente dovuto a B. Stewart ([25]) per quanto riguarda (I) e (II), ad A. Lunardi ([21]) per quanto riguarda la caratterizzazione degli spazi di interpolazione.

Tornando al nostro caso, problemi ellittici e parabolici in domini angolosi o con spigoli sono stati trattati in spazi con peso di tipo L^p o hölderiano (vedi, per esempio, [5], [6], [9], [10], [17], [18], [20], [22], [24]). Il caso L^p senza peso è stato studiato, essenzialmente in dimensione 2, da P. Grisvard e dalla sua scuola (vedi, ad esempio, [1], [2], [13]). L'equazione di Poisson con un parametro complesso e condizioni al bordo di Dirichlet in spazi di funzioni continue su un poligono piano è stato oggetto di uno degli ultimi lavori di P. Grisvard (vedi [14]) e ripreso in [16]. Ancora in spazi di funzioni continue su un dominio piano poligonale, è stato infine studiato in [7] il problema fortemente ellittico dipendente da un parametro con condizioni al bordo di Dirichlet. L'ambientazione in spazi di funzioni continue ha trovato un'ulteriore motivazione nell'ambito di certi problemi inversi di tipo parabolico, in cui sembra cruciale lavorare in algebre di Banach (vedi [8]). Il citato lavoro [7] contiene alcuni risultati del tipo 1)-3) nel caso piano. Questi risultati sono più precisi di quelli che otterremo nel seguito. Per tale motivo abbiamo considerato direttamente il caso $n+2$, con $n \geq 1$.

Torniamo ora al problema (1) nel dominio cilindrico $O = O_1 \times]0, T[$. Sia $x^0 := (x', 0)$, con $x' \in \partial O_1$. E' possibile (mediante un opportuno cambiamento di variabili) trasformare un intorno di x^0 on $\overline{O}$ in un intorno di 0

nel diedro $\mathbf{R}^n \times \overline{S_\phi}$, per un certo $\phi \in]0,\pi[$, in modo tale che nelle nuove coordinate l'operatore $\sum_{1\le i,j\le n+2} a_{ij}(x^0)D_{ij}$ diventi l'operatore di Laplace in dimensione $n+2$ Δ_{n+2}. Qui abbiamo posto

$$S_\phi := \{(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) : \rho > 0, \theta \in]0,\phi[\}. \qquad (7)$$

Allora il problema originale, opportunamente localizzato, si trasforma nel seguente

$$\begin{cases} (\lambda - \Delta_{n+2})\tilde{u} + P\tilde{u} = \tilde{f} & \text{in} \quad \mathbf{R}^n \times S_\phi, \\ \tilde{u}_{|\mathbf{R}^n \times \partial S_\phi} = 0, \end{cases} \qquad (8)$$

ove P è un operatore differenziale di ordine non superiore a 2, da pensarsi come una perturbazione (in un senso da precisare) di Δ_{n+2}. Cominciamo allora col considerare il problema non perturbato

$$\begin{cases} (\lambda - \Delta_{n+2})u = f & \text{in} \quad \mathbf{R}^n \times S_\phi, \\ u_{|\mathbf{R}^n \times \partial S_\phi} = 0, \end{cases} \qquad (9)$$

Nel seguito useremo la notazione $C(...)$ per indicare spazi di funzioni uniformemente continue e limitate, anche a valori vettoriali. Analogamente, useremo la notazione $C^k(...)$ per indicare spazi di funzioni uniformemente continue e limitate con tutte le derivate fino all'ordine k. In quest'ordine di idee lo spazio $C(\mathbf{R}^n \times S_\phi)$ è identificabile con lo spazio $C(\mathbf{R}^n; C(S_\phi))$. Sarà conveniente pensare a Δ_{n+2} come $\Delta_{(z_1,...,z_n)} + \Delta_{(z_{n+1},z_{n+2})}$. Cominciamo allora col considerare la realizzazione dell'operatore Δ_2 con condizioni al contorno di Dirichlet nello spazio $C(S_\phi)$. Questo spazio non si presta però molto per i nostri scopi, in quanto i risultati disponibili per i problemi ellittici non sono adatti a trattare perturbazioni. Consideriamo allora degli spazi meno naturali, che contengono $C(S_\phi)$: per $\tau < 0$ e τ non intero, consideriamo lo spazio $C^\tau(S_\phi)$. Ci limitiamo a definire $C^\tau(S_\phi)$ per $\tau \in]-1,0[$. La definizione generale é analoga e facilmente immaginabile. Sia O un aperto di $\mathbf{R}^n$. Poniamo, dato $\tau \in]-1,0[$,

$$C^\tau(O) := \{f \in \mathcal{D}'(O) : f = f_0 + \sum_{j=1}^n \partial_j f_j, f_0, f_1, ..., f_n \in C^{\tau+1}(O)\}, \qquad (10)$$

over $C^{\tau+1}(O)$ è il solito spazio di funzioni hölderiane su O (e quindi anche su $\overline{O}$). $\|.\|_{C^\tau(O)}$ sarà la norma naturale suggerita da (10). Lo spazio $C^\tau(O)$ coincide con lo spazio di Besov $B^\tau_{\infty,\infty}(O)$ (vedi [15], proposizione 1.7).

Il risultato seguente é un caso particolare del teorema 3.1 in [16]:

Teorema 2 *Consideriamo il problema*

$$\begin{cases} (\lambda - \Delta_2)u = f & in \quad S_\phi, \\ u_{|\partial S_\phi} = 0, \end{cases} \tag{11}$$

con $\phi \in]0, 2\pi[\setminus\{\pi\}$, $f \in C^\tau(S_\phi)$, *con* $\tau \in]-2, (\frac{\pi}{\phi} - 2) \wedge 0[$, $\lambda \in \mathbf{C}\setminus]-\infty, 0]$. *Allora il problema (11) possiede una e una sola soluzione* u *in* $C^{\tau+2}(S_\phi)$. *Inoltre, se* $|Arg(\lambda)| \leq \theta_0 < \pi$ *e* $|\lambda| \geq 1$,

$$|\lambda| \|u\|_{C^\tau(S_\phi)} + \|u\|_{C^{\tau+2}(S_\phi)} \leq C(\theta_0)\|f\|_{C^\tau(S_\phi)}. \tag{12}$$

La soglia $\frac{\pi}{\phi} \wedge 2$ è naturale per il problema in questione. Infatti:

(I) limitatamente al caso $\frac{\pi}{\phi} \notin \mathbf{N}$, la funzione $(x, y) \rightarrow Im((x + iy)^{\frac{\pi}{\phi}})$ è armonica in S_ϕ, si annulla su ∂S_ϕ e vicino a 0 non è più regolare di $C^{\frac{\pi}{\phi}}$;

(II) è ben noto (vedi [27]) che una stima del tipo (12) non vale se $\tau > 0$.

Si osservi che noi siamo interessati al caso $\phi \in]0, \pi[$, in cui la soglia $(\frac{\pi}{\phi} - 2) \wedge 0$ é maggiore di -1. Fissato allora $\tau \in]-1, (\frac{\pi}{\phi} - 2) \wedge 0[$, definiamo per comodità l'operatore B come segue:

$$\begin{cases} D(B) := \{u \in C^{2+\tau}(S_\phi) : u_{|\partial S_\phi} = 0\}, \\ Bu := \Delta_2 u, u \in D(B). \end{cases} \tag{13}$$

Riscriviamo ora il problema (9) nella forma astratta

$$(\lambda - \Delta_n)u - Bu = f. \tag{14}$$

Al solito, qui identifichiamo certe funzioni e distribuzioni in $\mathbf{R}^n \times S_\phi$ con corrispondenti funzioni o distribuzioni su $\mathbf{R}^n$ a valori in spazi di funzioni o distribuzioni in S_ϕ.

Abbiamo in mente di applicare all'equazione (14) la trasformata di Fourier rispetto alle prime n variabili. Per poter studiare le eventuali soluzioni, dobbiamo metterci in un quadro funzionale in cui sia applicabile qualche risultato su moltiplicatori di Fourier a valori vettoriali. Un risultato molto generale, che presenta il grosso vantaggio di non richiedere alcuna condizione sugli spazi sottostanti, vale nell'ambito degli spazi di Besov (vedi [3], teorema 6.3). Ne presentiamo qui un caso particolare che applicheremo nel seguito:

Teorema 3 *Siano, per* $j \in \{1, 2\}$, E_j *spazi di Banach,* $m \in \mathbf{R}$, $a \in C^{n+1}(\mathbf{R}^n; \mathcal{L}(E_1, E_2))$, *tali che esiste* $C > 0$ *tale che, per ogni* $\alpha \in N_0^n$ *con* $|\alpha| \leq n + 1$, *per ogni* $\xi \in \mathbf{R}^n$,

$$\|\partial^\alpha a(\xi)\|_{\mathcal{L}(E_1,E_2)} \leq C(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}.$$

Allora, se σ e $\sigma - m$ sono elementi di $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$, l'applicazione

$$f \to \mathcal{F}^{-1}(a\mathcal{F}f)$$

appartiene a $\mathcal{L}(C^\sigma(\mathbf{R}^n;E_1);C^{\sigma-m}(\mathbf{R}^n,E_2))$.

Per applicare il teorema 3, fissiamo $\sigma \in]-1,0[$. Se $\lambda \in \mathbf{C}\setminus]-\infty,0]$, indicando con $\mathcal{F}$ la trasformata di Fourier rispetto alle prime n variabili, otteniamo

$$u = \mathcal{F}_\xi^{-1}((\lambda+|\xi|^2-B)^{-1}\mathcal{F}_\xi f).$$

Utilizzando allora i teorema 2 e 3, otteniamo il seguente

Lemma 1 *Siano $\sigma \in]-1,0[$, $\tau \in]-2,(\frac{\pi}{\phi}-2)\wedge 0[\setminus\{-1\}$, con $\sigma+\tau > -2$. Consideriamo il problema (9), con $\lambda \in \mathbf{C}\setminus]-\infty,0]$, $f \in C^\sigma(\mathbf{R}^n;C^\tau(S_\phi))$. Allora il problema (9) ha un'unica soluzione u appartenente a $\bigcap_{j=0}^{2} C^{\sigma+2-j}(\mathbf{R}^n;$ $C^{\tau+j}(S_\phi))$.*

Per i risultati a cui siamo interessati, nell'ambito delle funzioni continue, ricordiamo ancora che

$$C(\mathbf{R}^n\times S_\phi) = C(\mathbf{R}^n;C(S_\phi)) \subseteq C^\sigma(\mathbf{R}^n;C^\tau(S_\phi)).$$

Non è poi difficile dimostrare che

$$\bigcap_{j=0}^{2} C^{\sigma+2-j}(\mathbf{R}^n C^{\tau+j}(S_\phi)) \subseteq \bigcap_{\rho<2+\sigma+\tau} C^\rho(\mathbf{R}^n\times S_\phi). \tag{15}$$

Riepilogando, se $f \in C(\mathbf{R}^n\times S_\phi)$, otteniamo una soluzione u di (9) di classe $C^\rho(\mathbf{R}^n\times\overline{S_\phi})$ per ogni $\rho < 2+\sigma+\tau$, per ogni $\sigma < 0$ e per ogni $\tau < (\frac{\pi}{\phi}-2)\wedge 0$. Otteniamo allora una soluzione u di classe $C^\rho(\mathbf{R}^n\times\overline{S_\phi})$ per ogni $\rho < \frac{\pi}{\phi}\wedge 2$.

Vogliamo adesso estendere il lemma 1 al caso di un problema perturbato. Ci serve, innanzi tutto, un risultato sui moltiplicatori puntuali per lo spazio $C^\sigma(\mathbf{R}^n;C^\tau(S_\phi))$ nel caso di σ e τ negativi. E' noto (come conseguenza della proposizione 2.2 in [16] e di [26]) che per ogni $\rho > |\tau|$ $C^\rho(S_\phi)$ é uno spazio di moltiplicatori per $C^\tau(S_\phi)$. L'estensione (non banale!) al caso di distribuzioni a valori vettoriale è assai recente. Il seguente risultato è un caso particolare della proposizione A2.4 in [4]:

Teorema 4 *Siano σ e ρ numeri reali, con $|\sigma| < \rho$, $\sigma \notin \mathbf{Z}$. Sia poi E uno spazio di Banach. Allora esiste un'unica funzione bilineare e continua da $C^\rho(\mathbf{R}^n; \mathcal{L}(E)) \times C^\sigma(\mathbf{R}^n; E)$ a $C^\sigma(\mathbf{R}^n; E)$ che coincide con l'applicazione puntuale*

$$(uv)(x) = u(x)v(x)$$

se $v \in L^r(\mathbf{R}^n; E)$ per qualche $r \in [1, +\infty]$.

Applicando il teorema 4, concludiamo che, se $\rho_1 > |\sigma|$ e $\rho_2 > |\tau|$, allora $C^{\rho_1}(\mathbf{R}^n; C^{\rho_2}(S_\phi))$ è uno spazio di moltiplicatori puntuali per $C^\sigma(\mathbf{R}^n; C^\tau(S_\phi))$. Poiché

$$C^{\rho_1+\rho_2}(\mathbf{R}^n \times S_\phi) \subseteq C^{\rho_1}(\mathbf{R}^n; C^{\rho_2}(S_\phi)),$$

possiamo prendere come spazio di moltiplicatori puntuali ogni spazio C^ρ $(\mathbf{R}^n \times S_\phi)$ con $\rho > |\sigma| + |\tau|$.

La discussione precedente motiva la seguente estensione del lemma 1.

Lemma 2 *Siano $\phi \in]0, \pi[$, $\tau \in]-2, (\frac{\pi}{\phi} - 2) \wedge 0[\setminus \{-1\}$, $\sigma \in]-1, 0[$ tali che $\sigma + \tau > -2$. Sia $\mathcal{A}$ come in (2), con a_{ij} $(1 \le i, j \le n+2)$, a_j $(1 \le j \le n+2)$, a_0 appartenenti a $C^\alpha(\mathbf{R}^n \times \Omega_\phi)$, ove $\alpha > |\sigma| + |\tau|$. Consideriamo il problema*

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\lambda - \mathcal{A})u = f & in \quad \mathbf{R}^n \times \Omega_\phi, \\ u_{|\partial(\mathbf{R}^n \times \Omega_\phi)} = 0, & \end{array} \right. \tag{16}$$

con $\lambda \in \mathbf{C}$, $f \in C^\sigma(\mathbf{R}^n; C^\tau(\Omega_\phi))$.

Sia $\theta_0 \in [0, \pi[$. Allora esistono δ e R poitivi tali che, se

$$\sum_{i,j=1}^{n+2} \|a_{ij} - \delta_{ij}\|_{C(\mathbf{R}^n \times \Omega_\phi)} \le \delta, \tag{17}$$

$|\lambda| \ge R$ e $|Arg(\lambda)| \le \theta_0$, il problema (16) ha un'unica soluzione $u \in \bigcap_{j=0}^{2} C^{\sigma+2-j}(\mathbf{R}^n; C^{\tau+j}(\Omega_\phi))$.

Naturalmente, la conclusione del lemma 2 vale nel caso particolare $f \in C(\mathbf{R}^n \times S_\phi)$. In tal caso, un argumento di omogeneità dovuto a B. Stewart (vedi [25]) fornisce per ogni $\rho \in [0, 2 + \tau + \sigma[$ la stima

$$\|u\|_{C^\rho(\mathbf{R}^n \times S_\phi)} \le C(\theta_0, \rho)|\lambda|^{\frac{\rho}{2}-1}\|f\|_{C(\mathbf{R}^n \times S_\phi)}. \tag{18}$$

Torniamo ora al problema nel dominio cilindrico O. Eravamo partiti con un opportuno cambiamento di variabili, che trasformasse un intorno di $x^0 = (x', 0)$, con $x' \in \partial O_1$, in un intorno di 0 nel diedro $\mathbf{R}^n \times \overline{S_\phi}$, per un certo $\phi \in]0, \pi[$. Qual è il valore di ϕ? Considerazioni elementari di carattere geometrico forniscono

$$\phi(x^0) = \arccos\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n+1} a_{i,n+2}(x^0)\nu_i(x')}{\sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n+1} a_{ij}(x^0)\nu_i(x')\nu_j(x')}\sqrt{a_{n+2,n+2}(x^0)}}\right), \tag{19}$$

con $\nu(x')$ versore normale interno a ∂O_1 in x'.

Se invece $x_0 = (x', T)$, con $x' \in \partial O_1$, otteniamo

$$\phi(x^0) = \arccos\left(\frac{\sum_{i=1}^{n+1} a_{i,n+2}(x^0)\nu_i(x')}{\sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n+1} a_{ij}(x^0)\nu_i(x')\nu_j(x')}\sqrt{a_{n+2,n+2}(x^0)}}\right). \tag{20}$$

In conclusione, localizzando con i metodi descritti il problema, possiamo provare il seguente

Teorema 5 *Supponiamo che i coefficienti a_{ij}, a_j, a_0 $(1 \leq i, j \leq n+2)$ appartengano $C^\alpha(O)$, per qualche $\alpha > 0 \vee (2 - \frac{\pi}{\phi_0})$. Consideriamo il problema (1), con $|Arg(\lambda)| \leq \theta_0 < \pi$. Allora esiste $R' > 0$ tale che, se $|\lambda| \geq R'$ e $f \in C(O)$, tale problema possiede una e una sola soluzione u in $H^2(O)$. Tale soluzione u appartiene a $\bigcap_{\rho < 2\wedge\frac{\pi}{\phi_0}} C^\rho(O)$. Inoltre, per ogni $\rho \in [0, 2\wedge\frac{\pi}{\phi_0}[$ esiste $C > 0$, dipendente soltanto da θ_0 e ρ, tale che*

$$\|u\|_{C^\rho(O)} \leq C|\lambda|^{\frac{\rho}{2}-1}\|f\|_{C(O)}. \tag{21}$$

Dal teorema 5 segue facilmente il seguente

Teorema 6 *Sotto le ipotesi del teorema 5, poniamo*

$$D(A) = \{u \in H^2(O) \cap H_0^1(O) : \mathcal{A}u \in C(O)\}, \tag{22}$$

$$Au = \mathcal{A}u \qquad \forall u \in D(A). \tag{23}$$

Allora A è il generatore infinitesimale di un semigruppo non fortemente continuo in 0 nello spazio $C(O)$. Inoltre, se $\theta \in]0, 1 \wedge \frac{\pi}{2\phi_0}[\setminus \{\frac{1}{2}\}$, con

$$\phi_0 := \max_{x^0 \in \partial O_1 \times \{0,T\}} \phi(x^0), \tag{24}$$

vale

$$(C(O), D(A))_{\theta,\infty} = \{f \in C^{2\theta}(O) : f_{|\partial O} = 0\}. \tag{25}$$

Presentiamo un'applicazione del teorema 6 all'equazione parabolica (4). Ricordiamo, innanzi tutto, il seguente risultato, dovuto a E. Sinestrari (vedi [23]):

Teorema 7 *Siano X uno spazio di Banach, $A : D(A) \subseteq X \to X$ il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico (non necessariamente continuo in 0) in X. Sia infine $\alpha \in]0,1[$. Allora le seguenti condizioni sono necessarie e sufficiente affinché il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), & t \in [0,\tau], \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{26}$$

possieda una e una sola soluzione u in $C^{1+\alpha}([0,\tau], X) \cap C^{\alpha}([0,\tau], D(A))$:
(I) $f \in C^{\alpha}([0,T]; X)$;
(II) $u_0 \in D(A)$;
(III) $Au_0 + f(0) \in (X, D(A))_{\alpha,\infty}$.

Dai teoremi 6 e 7 segue immediatamente il seguente

Corollary 1 *Si consideri il problema misto parabolico (4), sotto le ipotesi del teorema 5. Sia $\alpha \in]0, 1 \wedge \frac{\pi}{2\phi_0}[\setminus\{\frac{1}{2}\}$. Allora le seguenti condizioni sono necessarie e sufficiente affinché tale problema possieda un'unica soluzione u in $C^{1+\alpha}([0,\tau], C(O)) \cap C^{\alpha}([0,\tau], D(A))$:*
(I) $f \in C^{\alpha}([0,\tau]; C(O))$;
(II) $u_0 \in D(A)$;
(III) $Au_0 + f(0) \in C^{2\alpha}(O)$ e si annulla in ∂O.
La condizione $u \in C^{\alpha}([0,\tau]; D(A))$ significa che $u \in C^{\alpha}([0,\tau]; H^2(O) \cap H_0^1(O))$ e $Au \in C^{\alpha}([0,\tau]; C(O))$.

Dal teorema 1 segue abbastanza facilmente che, in realtà, anche nel caso $\frac{\pi}{\phi_0} < 2$ la soluzione u è di classe C^{ρ} per ogni ρ minore di 2 lontano dai punti del tipo $(x', 0)$ e (x', T) con $x' \in \partial O_1$. Da questo punto di vista gli spazi $C^{\rho}(O)$ sono inadeguati, in quanto non rendono conto di questo fenomeno. Introduciamo allora certi spazi di funzioni con peso. Poniamo, innanzi tutto,

$$\Gamma := \partial O_1 \times \{0, T\}. \tag{27}$$

Se $x \in O$, indichiamo con $\delta(x)$ la distanza di x da Γ:

$$\delta(x) := \min_{y \in \Gamma} |y - x|. \tag{28}$$

Se $r \in]0, r_0[$, con $r_0 := \sup_O \delta$, poniamo

$$O_r := \{x \in O : \delta(x) > r\}. \tag{29}$$

Definizione 1 *Siano a e b numeri reali non negativi. Poniamo*

$$C_b^a(O;\Gamma) := \{f : O \to \mathbf{C} : \sup_{0<r<r_0} r^b \|f\|_{C^a(O_r)} < +\infty\}$$

Doteremo questi spazi della loro norma naturale. Spazi di questo genere sono stati considerati da vari autori, in particolare di scuola russa. Per esempio, ne caso $\Gamma = \partial O$ in [12] e [11] lo spazio che noi abbiamo indicato con $C_b^a(O;\Gamma)$ viene chiamato $H_{(a)}^{b-a}(O)$. Vale il seguente

Teorema 8 *Siano soddisfatte le ipotesi del teorema 5. Supponiamo $\phi_0 > \frac{\pi}{2}$ e consideriamo il problema (1). Allora:*

(I) se $|Arg(\lambda)| \leq \theta_0 < \pi$, $|\lambda| \geq R'$ e $f \in C(O)$, la soluzione u in $H^2(O)$ appartiene, per ogni $\rho \in [\frac{\pi}{\phi_0}, 2[$, a $\bigcap_{\epsilon>0} C^\rho_{\rho-\frac{\pi}{\phi_0}+\epsilon}(O;\Gamma)$.

(II) Per ogni $\epsilon > 0$ esiste $C > 0$ (dipendente da ϵ, ρ, θ_0) tale che

$$\|u\|_{C^\rho_{\rho-\frac{\pi}{\phi_0}+\epsilon}(O;\Gamma)} \leq C|\lambda|^{\frac{\rho}{2}-1}\|f\|_{0,O}.$$

(III) Se $\theta \in [\frac{\pi}{2\phi_0}, 1[$, per ogni $\epsilon > 0$

$$\{f \in C^{2\theta}(0) : f_{|\partial 0} = 0\} \subseteq (C(O), D(A))_{\theta,\infty} \subseteq \{f \in C^{2\theta}_{2\theta-\frac{\pi}{\phi_0}+\epsilon}(0) : f_{|\partial 0} = 0\}.$$

Bibliografia

[1] J. O.-O. Adeyeye. Generation of analytic semigroups in $L^p(\Omega)$ by the Laplace operator", Boll. U.M.I. Anal. Funz. Appl. ser. VI, vol. IV-C, n. 1. 113-128 (1985).

[2] J. O.-O. Adeyeye, "Characterisation of real interpolation spaces between the domain of the Laplace operator and $L^p(\Omega)$; Ω polygonal and applications", J. Math. pures et appl. 67, 263-290 (1988).

[3] H. Amann, "Operator-valued Fourier multipliers, vector-valued Besov spaces, and applications", Math. Nachr. 186 (1997), 5-56.

[4] H. Amann, "Elliptic operators with infinite-dimensional state spaces", J. evol. equ. 1 (2001) 143-188.

[5] A. Azzam, E. Kreiszig, "On solutions of parabolic equations in regions with edges", Bull. Austr. Math. Soc. vol. 22, 219-230 (1980).

[6] A. Azzam, E. Kreiszig, "Smoothness of solutions of parabolic equations in regions with edges", Nagoya Math. J. vol. 84, 159-168 (1981).

[7] F. Colombo, D. Guidetti, A. Lorenzi, "Elliptic equations in non-smooth plane domains with an application to a a parabolic problem", Adv. Diff. Eq. 7 (2002), 695-716.

[8] F. Colombo, D. Guidetti, A. Lorenzi,"Integrodifferential identification problems for thermal materials with memory in non-smooth plane domains", preprint (2001).

[9] E. V. Frolova, "On a certain nonstationary problem in a dihedral angle I", Journ. Sov. Math. 70, 1828-1840 (1994).

[10] M. G. Garroni, V. A. Solonnikov, M. A. Vivaldi, "Existence and regularity results for oblique derivative problems for heat equations in an angle ", Proc. Royal Soc. Edinburgh 128A, 47-79 (1998).

[11] D. Gilbarg, L. Hörmander, "Intermediate Schauder estimates", Arch. Rat. Mech. Anal. 74 (1980), 297-318.

[12] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Second Edition, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 224, Springer (1998).

[13] P. Grisvard, " "*Elliptic problems in nonsmooth domains*". Monographs in Mathematics 24, Pitman (1985).

[14] P. Grisvard, "Majorations en norme du maximum de la résolvante du Laplacien dans un polygone", in "Nonlinear partial differential equations and their applications- Collége de France-Seminar-Vol. XII" (ed. H. Brezis, J. L. Lions), Pitman Research Notes in Math. 302 (1994).

[15] D. Guidetti, "On elliptic problems in Besov spaces", Math. Nachr. 152 (1991), 247-275.

[16] D. Guidetti, "The mixed Cauchy-Dirichlet problem for the heat equation in a plane angle in spaces of Hölder continuous functions", Adv. Diff. Eq., 8 (2001), 897-930.

[17] V. A. Kondratiev, "Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular point", Trans. Moscow Math. Soc., 227-314 (1968).

[18] V. A. Kondratiev, O. A. Oleinik, "Boundary value problems for partial differential equations in non-smooth domains", Russian Math. Surv. 38, 2, 1-86 (1983).

[19] V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, J. Rossmann, *"Elliptic boundary value problems in domains with point singularities*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 52, American Mathematical Society (1997).

[20] A. Kufner, A.-M. Sändig, *Some applications of weighted Sobolev spaces*, Teubner-Texte zur Mathematik, 100 (1987).

[21] A. Lunardi, "Characterization of interpolation spaces between domains of elliptic operators and spaces of continuous functions with applications to fully nonlinear parabolic equations", Math. Nachr. 121 (1985), 295-318.

[22] S. A. Nazarov, B. A. Plamenevsky, *"Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries"*, De Gruyter Expositions in Mathematics 13 (1994).

[23] E. Sinestrari, "On the abstract Cauchy problem in spaces of continuous functions" Journ. Math. Anal. Appl. 107 (1985), 16-66.

[24] V. A. Solonnikov, "Solvability of the classical initial-boundary value problems for the heat conduction equation in a dihedral angle", J. Soviet Math. 32, 526-546 (1986).

[25] B. Stewart, "Generation of analytic semigroups by strongly elliptic operators under general boundary conditions", Trans. Amer. Math. Soc. 259 (1980), 299-310.

[26] H. Triebel, *Theory of function spaces*, Birkhäuser (1983).

[27] W. von Wahl, "Gebrochene Potenzen eines elliptischen Operators und parabolische Differentialgleichungen in Räumen Hölderstätiger Funktionen", Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 43 (1975), 234-262.